FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Licence d'Etudes Fondamentales ès Sciences Economiques et de Gestion -Semestre 2-

Ensemble-7-

Module: Mathématiques financières

Chapitre 3 : Les annuités

Professeur : Abdelouhab HAMLIRI

	Module: Mathématiques financières
	Plan du cours ❑ Chapitre 1 : Les intérêts simples ❑ Chapitre 2 : Les intérêts composés ❑ <u>Chapitre 3 : Les annuités</u> ❑ Chapitre 4 : Les emprunts ❑ Chapitre 5 : Les choix d'investissement

Chapitre 3 : Les annuités

Section 1 : Généralités

- Les annuités sont des sommes payées/reçues à des intervalles de temps réguliers et constants.
- La période qui sépare deux paiements successifs est désignée par période. Elle peut être formulée en année, semestre, trimestre ou mois.
- La notion d'annuité est utilisée pour résoudre certains problèmes financiers, notamment:
  - ✓ Remboursement d'un emprunt ou d'une dette (annuités de remboursement ou annuités d'amortissement)
  - ✓ Constitution d'un capital (annuités de capitalisation ou annuités de placement)

L'objectif de l'étude des annuités est de déterminer, à une date donnée, *la valeur actuelle* ou *la valeur acquise* d'une suite d'annuités, constantes ou non, compte tenu de l'intérêt escompté ou produit par chaque versement.

Les annuités *constantes* sont des annuités dont la somme versée est constante, alors que les annuités *variables* sont des annuités dont le montant varie d'une période à l'autre. (Dans ce chapitre, il sera seulement question des annuités constantes).

Section 2 : La valeur acquise par une suite d'annuités constantes

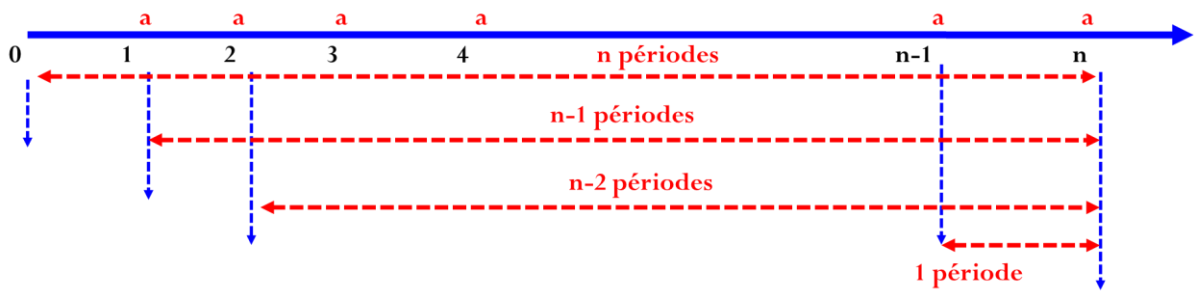
On distingue généralement entre annuités constantes de début de période, dites annuités de placement, et les annuités de fin de période, dites annuités de remboursement.

I- La valeur acquise par une suite d'annuités de fin de période

❖ Formalisation

A la fin de chaque période on procède au versement d'une annuité « a ». On cherche à calculer la valeur acquise « V_a » à la fin du placement, et ce en tenant compte d'un taux d'intérêts composés « i ».

La période retenue est l'année, mais on peut effectuer des versements semestriels, trimestriels ou mensuels. On parle alors dans ce cas de semestrialités, trimestrialités ou mensualités.



__Rappel :__ Principe de la suite géométrique

Prenons l'exemple d'une suite géométrique à 5 termes de raison q et de premier terme a:

(1) $S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + a \times q^4$

(2) $S \times q = a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + a \times q^4 + a \times q^5$

(2) – (1) $S \times q - S = a \times q^5 - a \leftrightarrow S \times (q-1) = a \times (q^5 - 1)$

La somme des termes d'une progression géométrique est :

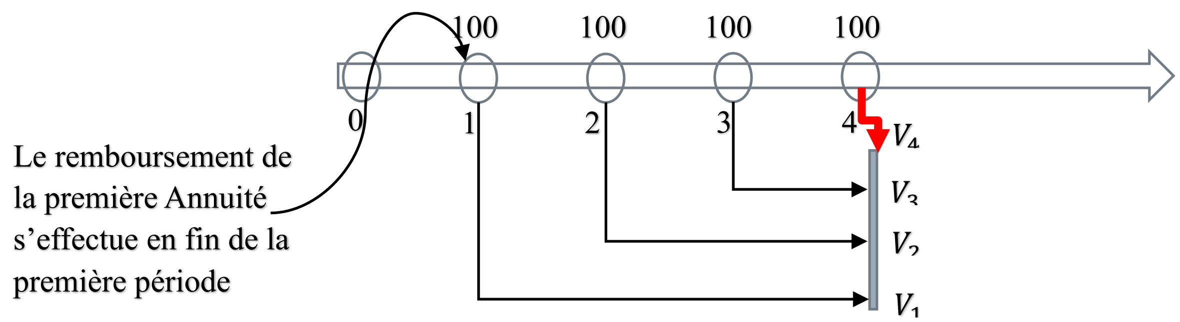
$S = a \times \frac{q^5-1}{q-1}$ avec $q \neq 1$

Généralisation pour n termes $S = a \times \frac{q^n-1}{q-1}$ avec $q \neq 1$ en posant q = (1+i)

On trouve $S = a \times \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}$

- **Exemple :**

Calculer à 10% la valeur acquise par 4 annuités constantes de 100 dh après le dernier versement.



$$\boxed{V_n = C_0 \times (1+i)^n}$$

$$V_4 = C_0 \times (1+i)^0$$

$$V_3 = C_0 \times (1+i)^1$$

$$V_2 = C_0 \times (1+i)^2$$

$$V_1 = C_0 \times (1+i)^3$$

$$V_n = ?$$

$$V_n = V_4 + V_3 + V_2 + V_1$$
$$V_4 = 100 + 100 \times 1{,}1 + 100 \times 1{,}1^2 + 100 \times 1{,}\ 1^3$$

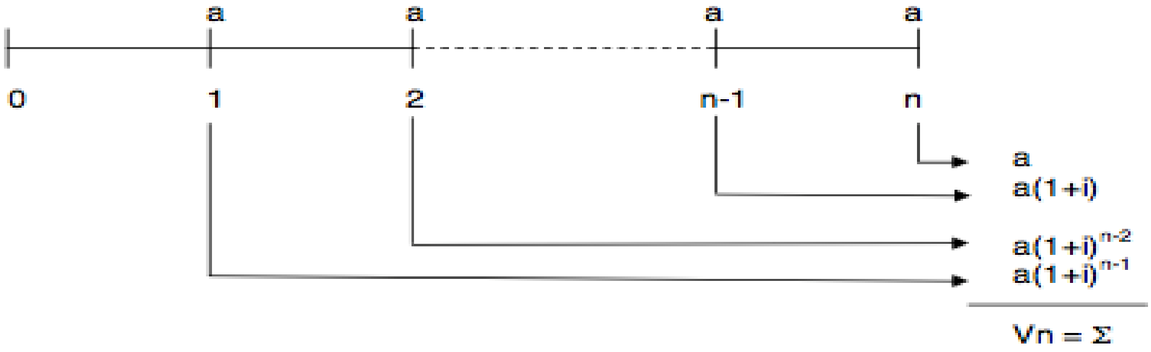
$$S = a \times \frac{q^{n-1}}{q-1} \text{Avec} q \neq 1$$

$$V_4 = 100 \times \frac{1{,}1^4 - 1}{1{,}1 - 1} = 464{,}1$$

❖ ***<u>Valeur acquise au moment du dernier versement</u>***

- **Définition**

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (Vn) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Si on note par:

- V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}}$$

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

- **Application n°1 :**

Une entreprise s'est endettée auprès de sa banque et doit verser une suite de 10 annuités d'un montant de 150.000,00dhs chaque année.

- Sachant que le taux d'intérêt pratiqué est de 9% l'an, déterminer la valeur acquise lors du dernier versement.

- **Corrigé :**

On a :

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Donc :

$$V_{10} = 150\ 000 \times \frac{(1+0{,}09)^{10} - 1}{0{,}09}$$

$$V_{10} = 2\ 278\ 939{,}45$$

- **Application n°2 :**

- Déterminer le montant qu'il faut verser à la fin de chaque trimestre pendant une durée de 9 ans, pour constituer à la date du dernier versement, un capital de 450.000,00dhs, sachant que le taux trimestriel est de 2%.

Corrigé :

On a:

$$450\ 000 = a \times \frac{(1+0{,}02)^{36} - 1}{0{,}02}$$

Donc :

$$450\ 000 = 51{,}99\ a$$

$$a = 8\ 655{,}50$$

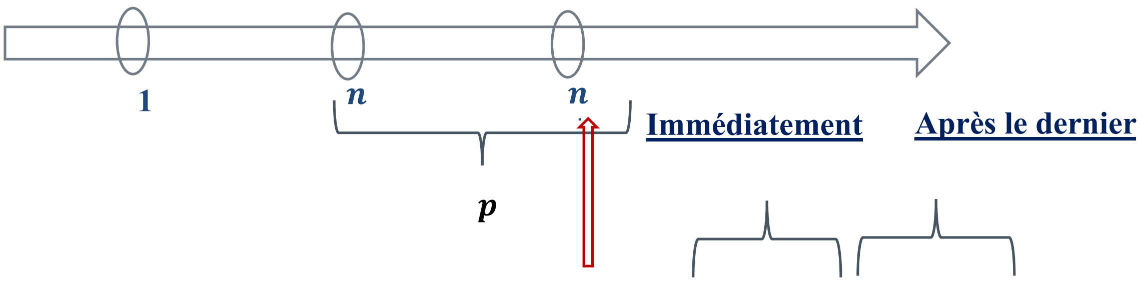
❖ ***<u>Valeur acquise à une date postérieure au dernier versement</u>***

- **Définition**

▪ La valeur acquise de n annuités de p périodes après le dernier versement.

Si on note par:

- V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- p : le nombre de périodes après de le dernier versement
- i : le taux d'intérêt



$$\boxed{V_{n+p} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^p}$$

Application n° 3 :

Une entreprise place 10.000,00dhs le 31/12 de chaque année au cours des années N à N+9 incluse au taux d'intérêt annuel de 3%. Les intérêts continuent à courir après cette date.

- De combien disposera l'entreprise juste après le dernier versement?
- De combien disposera l'entreprise le 01/01/N+13.

Corrigé :

- De combien disposera l'entreprise juste après le dernier versement?

On a: $$\mathrm{V_n} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\mathrm{V_{10}} = 10\ 000 \times \frac{(1+0{,}03)^{10} - 1}{0{,}03}$$

Donc $$\mathrm{V_{10}} = 146\ 638{,}79$$

- De combien disposera l'entreprise le 01/01/N+13.

On a: $$\mathrm{V_{n+p}} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^p$$

$$\mathrm{V_{10+4}} = 10\ 000 \times \frac{(1+0{,}03)^{10} - 1}{0{,}03} \times (1+0{,}03)^4$$

Donc $$\mathrm{V_{14}} = 165\ 043{,}21$$

- **Application n°4 :**

On verse 900,00dhs par mois pendant 5 ans (taux mensuel 0,75%). La capitalisation des intérêts est mensuelle.

- Calculer la valeur acquise 6 mois après le dernier versement.

Corrigé :

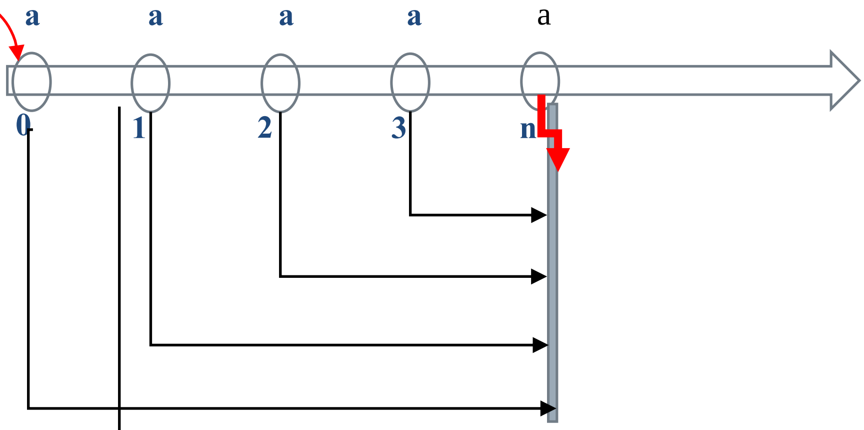
On a: $$\mathrm{V_{n+p}} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^p$$

$$\mathrm{V_{60+6}} = 900 \times \frac{(1+0{,}00075)^{10} - 1}{0{,}00075} \times (1+0{,}00075)^6$$

Donc $$\mathrm{V_{66}} = 9\ 071{,}14$$

II- La valeur acquise par une suite d'annuités de début de période

Dans de le cas des annuités de début de période, <u>les versements ont lieu au début de chaque période.</u>



Le remboursement de
la première Annuité
s'effectue en début de
la première période

Capitalisation

$$\boxed{(1) V_n = V_a \times (1+i)^n}$$

$$\boxed{(2) V_a = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

La formule des annuités constantes en fin de la première période

$$(2) \text{ dans } (1)\ V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i) \text{ avec n=1}$$

La valeur Acquise des annuités constantes de début de période s'obtient suivant la formule suivante :

$$\boxed{V_n = a(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Application n° 1 :

Calculer le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 12 annuités de 27 500 DH chacune. Taux : 9% l'an.

Corrigé :

On a $$V_n = a(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{12} = 27.500 \times \frac{(1+0{,}09)^{12} - 1}{0{,}09} \times (1+0{,}09)$$

Donc $$V_{12} = 603\ 718{,}08$$

Application n° 2 :

Quel doit être la valeur de 6 placements égaux effectués, au début de chaque trimestre pour avoir une valeur acquise de 18 790,98 DH, si le taux annuel est de 5%?

Corrigé :

On commence d'abord par le calcul du taux d'intérêt de la période considérée (trimestre).

$$i_{trimestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$i_{trimestriel} = 1{,}22\%$$

On a: $$V_n = a(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = \frac{V_n \times i}{(1+i) \times (1+i)^n - 1}$$

$$a = \frac{18790{,}98 \times 0{,}0122}{(1+0{,}0122) \times ((1+0{,}0122)^6 - 1)}$$

Donc $$a = 3\,000$$

Application n° 3 :

Pour améliorer sa pension de retraite, Monsieur HAIRIBI se constitue un capital en versant chaque année 5.000,00dhs, et ce pendant 15 ans. Les sommes sont bloquées et rémunérées au taux annuel de 6,5%.

- De quelles sommes disposera-t-il au moment du dernier versement?

Corrigé :

On a: $$V_n = a(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{15} = 5\,000 \text{ x } (1{,}065) \times \frac{(1+0{,}065)^{15} - 1}{0{,}065}$$

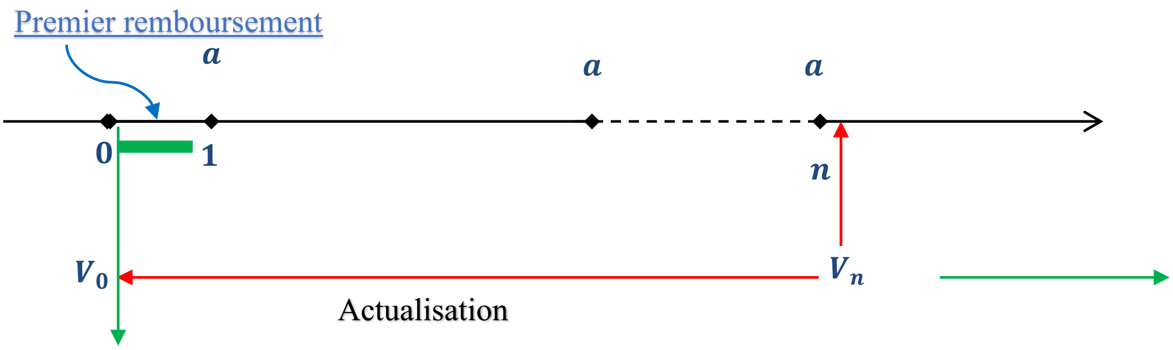
Donc $$a = 128\,770{,}05$$

Section 3 : La valeur actuelle d'une suite d'annuités

La valeur actuelle d'une suite d'annuités est égale à la somme des valeurs actuelles de chaque annuité

I- La valeur actuelle d'une suite d'annuités de fin de période

❖ **Formalisation**



$$\boxed{V_0 = V_n \times (1+i)^{-n}}$$

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$V_0 = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^{-n}$$

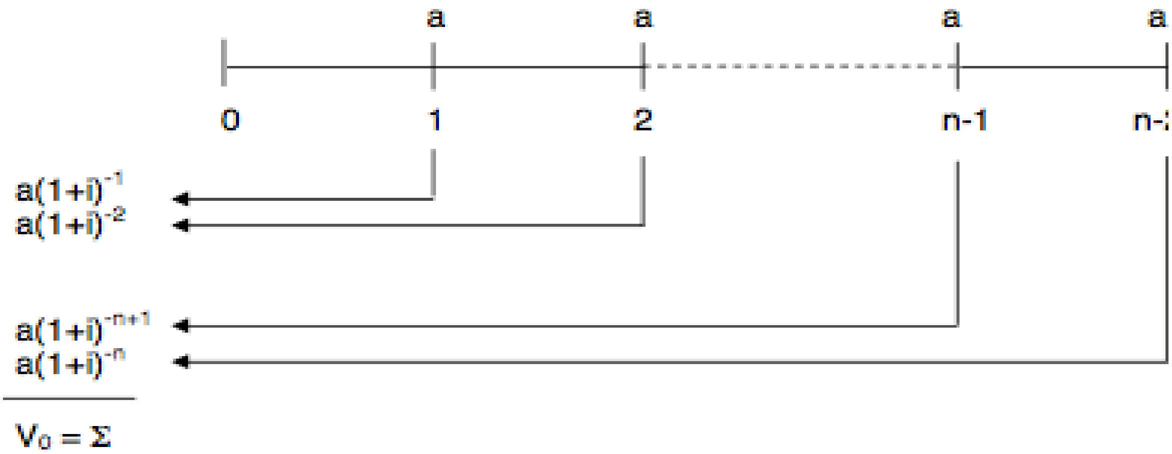
$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- **Définition**

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (V_0) exprimée à la date origine.

Si on note par:

- V_0 : la valeur actuelle par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- i : le taux d'intérêt par période d'actualisation



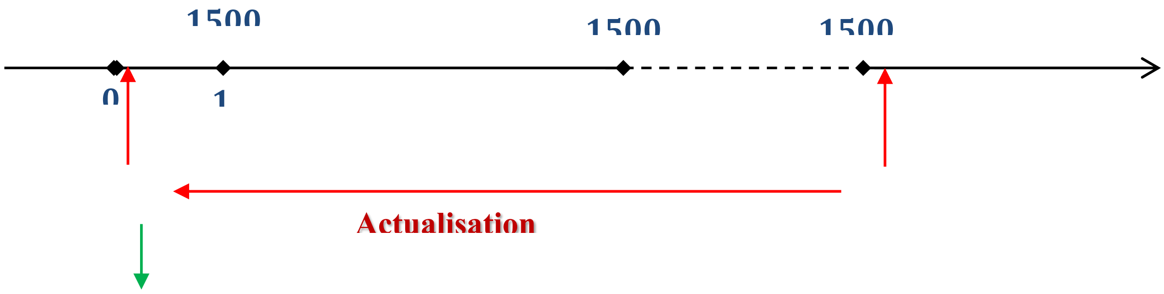
$$V_0 = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple :

Déterminer la *valeur actuelle* d'une suite d'annuités <u>*constantes*</u> de 1500 dh versées à la fin de chaque année pendant 8 ans. Le taux est 10%.

Corrigé :



$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 1500 \times \frac{1-(1+0{,}1)^{-8}}{0{,}1}$$

$$V_0 = 8002{,}39\ DH$$

Application n°1 :

Déterminer la valeur actuelle à l'origine d'une suite de 9 annuités de 31.000,00dhs chacune, en tenant compte d'un taux d'intérêt de 9,5%.

Corrigé :

On a $V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$$V_0 = 31\,000 \times \frac{1-(1+0{,}095)^{-9}}{0{,}095}$$

Donc $V_0 = 182\,133{,}79$

Application n°2 :

Salim emprunte 100.000,00dhs à 10% remboursables en 6 ans par annuités constantes.

- Combien doit-il payer à la fin de chaque année?

Corrigé

On a $V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

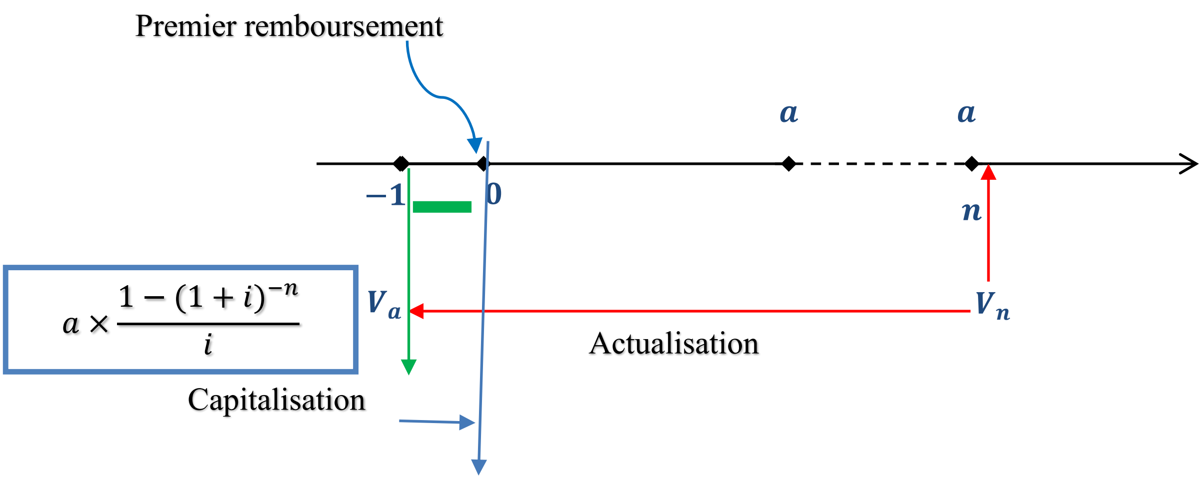
$$a = \frac{V_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = \frac{100\,000 \times 0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-6}}$$

$$a = 22\,960{,}73$$

II- La valeur actuelle d'une suite d'annuités de début de période

❖ Formalisation



$$V_0 = \left[a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \times (1+i)$$

$$V_0 = a(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Application n°1:

Calculer la valeur actuelle, au moment du versement du premier terme, par une suite de 15 annuités de 31.000 DH chacune. Taux d'intérêt : 12,5% l'an.

Corrigé :

On a : $V_0 = a(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$$V_0 = 31000\ (1+0{,}125) \times \frac{1-(1+0{,}125)^{-15}}{0{,}125}$$

Donc : $V_0 = 231.322{,}18$

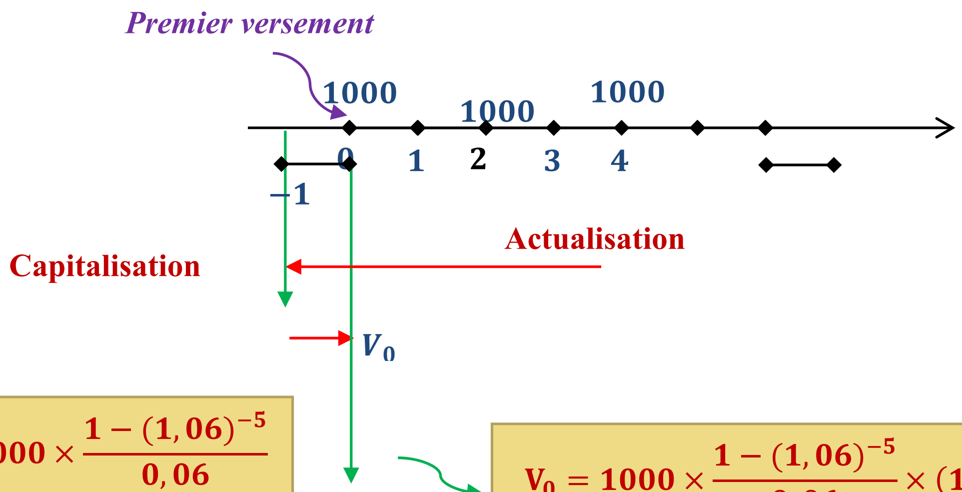
Application n°2 :

Un emprunt est contracté au taux de 6% est remboursé à l'aide de 5 annuités annuelles constantes de 1000 dh chacune. Calculer la valeur actuelle de l'emprunt dans les cas suivants:

- La première annuité est versée immédiatement (annuité de début de période) ?
- La première annuité est versée dans 6 mois?

Corrigé :

- La première annuité est versée immédiatement (annuité de début de période) ?



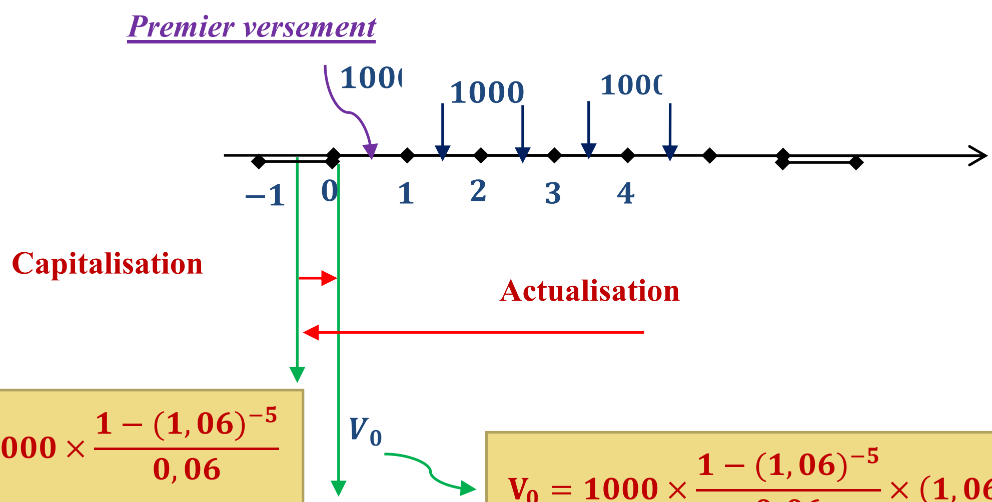
$$1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06}$$

$$V_0 = 1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \times (1,06)^1$$

Je cherche le montant
de l'emprunt
Aujourd'hui

$$V_0 = 4465,10\ DH$$

- La première annuité est versée dans 6 mois?



$$1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06}$$

$$V_0 = 1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \times (1,06)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_0 = 4336,89$$

Section 4 : L'équivalence de capitaux

Cela consiste à remplacer une suite d'annuités par un montant unique, ce qui nécessite l'évaluation de la suite à une date quelconque.

Exemple n°1:

Pour acheter une voiture de fonction, un jeune entrepreneur est face à deux possibilités:

1. Règlement en 8 annuités constantes, de 30.000,00dhs chacune.
2. Règlement en un versement unique, dans 4 ans, après la date d'acquisition.

- Sachant que le taux d'intérêt est de 11%, déterminer la valeur nominale du versement unique.

Corrigé :

- A la date 0 on a

$$\mathrm{V}_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- Pour un règlement en 8 annuités constantes, de 30.000,00dhs chacune on aura :

$$\mathrm{V}_0 = 30\ 000 \times \frac{1-(1+0{,}11)^{-8}}{0{,}11}$$

$$\mathrm{V}_\mathrm{n} = 154\ 383{,}68$$

- Règlement en un versement unique, dans 4 ans on aura :

$$\mathrm{V}_0 = A4 \times (1+0{,}11)^{-4}$$

- Etant donné que les deux versements sont équivalents donc égales, la valeur nominale du versement unique serait :

$$A4 = 234\ 365{,}30$$

Exemple n°2:

Monsieur Jamal a contracté en début N un emprunt de 200.000,00dhs remboursable par 15 annuités constantes au taux de 7,5%.

Il prévoit de procéder au remboursement intégral de cet emprunt le 01/01/N+10.

- Déterminer le montant de ce remboursement

Corrigé :

- A la date 0 on a

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- Pour un règlement en 15 annuités constantes, on aura une annuité :

$$200\,000 = a \times \frac{1-(1+0{,}075)^{-15}}{0{,}075}$$

$$a = 22\,657{,}44$$

- Règlement en un versement unique, dans 10 ans on aura :

$$V_0 = An \times (1+0{,}075)^{-10}$$

- La valeur nominale du versement unique serait :

$$200\,000 = An \times (1+0{,}075)^{-10}$$

$$An = 412\,206{,}31$$